Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot de fête foraine** (12 questions) **Page 3**

2. **Conformité et durée de vie de tubes fluorescents, estimation d'une proportion** (9 questions) **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsforge.fr/assets/annales/bts-forge/E2 - Mathématiques/2022/BTS Forge - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot se déplace initialement à 20 m/s sur un axe horizontal avant d'être ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée avec une équation différentielle, une analyse de fonction, une intégrale et un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.**

Le sujet rappelle que les solutions de $y' + ay = 0$ sont de la forme $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$. En prenant une constante réelle arbitraire k, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = ke^{-0,8t}$, avec k réel.**

Question 1. b. **La fonction g est définie par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

1. Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$.
2. Alors $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, ce qui correspond au second membre de (E). L'égalité vaut pour tout t, donc g vérifie l'équation.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **g(t) = 5 est bien une solution de (E).**

Question 1. c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). Les autres solutions s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène (E_0), déterminées à la question précédente. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> **$y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec k réel.**

Question 2. **Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

Dans la solution générale, la condition initiale donne $f(0) = 5 + ke^0 = 5 + k = 20$. Ainsi, $k = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient la solution de l'équation différentielle qui respecte la vitesse initiale du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Quand *t* tend vers +∞, l'exposant *-0,8t* tend vers -∞. Donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite est ainsi établie.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est 5.

Question 1. b. En déduire que la courbe représentative C de f admet une asymptote et en donner une équation.

1. La limite de *f(t)* en +∞ est finie et égale à 5.
2. Une courbe dont la fonction admet une limite finie en +∞ possède une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. L'équation de l'asymptote est donc *y = 5*.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : y = 5.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Sur *[0 ; +∞[*, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur tout l'intervalle, donc *f* décroît strictement. De plus, *f(0) = 20* et sa limite en +∞ vaut 5.

t	**0**	**+∞**
f'(t)	−	
f(t)	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur [0 ; +∞[.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Pour tout instant fini, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste positive et tend vers 5 m·s^{-1} sans atteindre zéro. Selon ce modèle, le freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers 5 m·s^{-1} et ne s'annule pas.

Question 4. a. **La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.**

En dérivant le premier terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on multiplie par la dérivée de l'exposant, soit $-0,8$. Ainsi, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$, qui est exactement $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

F'(t) = f(t) : F est une primitive de f.

Question 4. b. **À l'aide de l'intégrale donnée pour la distance parcourue, calculer la valeur exacte de la distance du chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. Le remplacement des bornes donne $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. La valeur arrondie au centimètre est 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m ≈ 15,33 m.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique proposition exacte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + 24/5\ t^2$. Le développement limité à l'ordre 2 doit conserver cette partie et ajouter un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro en 0. La troisième proposition correspond à ces deux critères.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ tendant vers 0.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^{0} = -12$. Elle passe donc par le point d'ordonnées 20 et a pour pente -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> **T : y = 20 - 12t.**

2. Conformité et durée de vie de tubes fluorescents, estimation d'une proportion

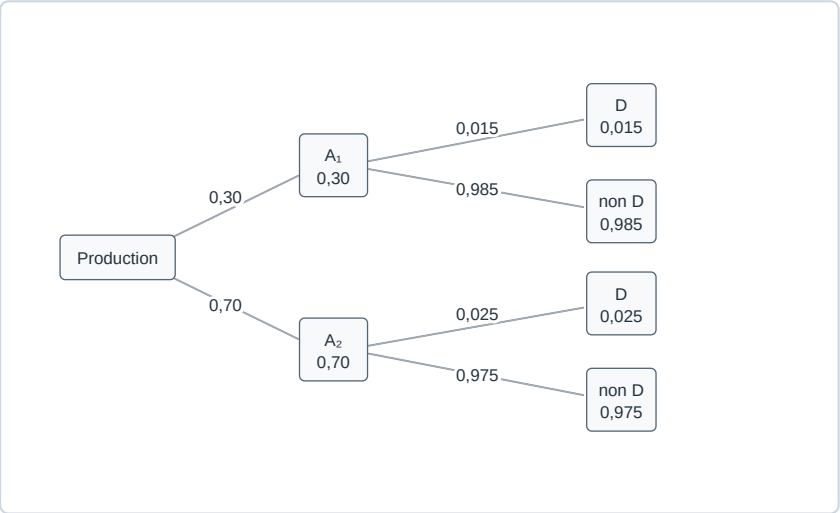
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et de défaut propres à chacun. L'exercice porte ensuite sur leur durée de bon fonctionnement et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes utilisés pour leur fixation.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation des deux ateliers et des tubes présentant ou non un défaut, à partir des données de production et des taux de défaut.

L'atelier 1 fournit 30 % des tubes et l'atelier 2 en fournit 70 %. Les taux de défaut sont conditionnels à l'atelier : 0,015 pour le premier et 0,025 pour le second. Les branches « non D » portent les probabilités complémentaires, respectivement 0,985 et 0,975. L'arbre ci-contre décrit les deux choix successifs.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités des branches issues d'un atelier sont conditionnelles à cet atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), puis D (0,015) ou non D (0,985) ; atelier 2 (0,70), puis D (0,025) ou non D (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité conjointe, on multiplie la proportion produite par l'atelier 1 par son taux de défaut. Ce calcul porte sur l'ensemble de la production, et non uniquement sur les tubes de cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que P(D) = 0,0195, valeur indiquée dans l'énoncé.**

Les événements « défaut provenant de l'atelier 1 » et « défaut provenant de l'atelier 2 » sont incompatibles et couvrent tous les tubes défectueux. On additionne donc leurs probabilités conjointes :

$$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,0045 + 0,0175 = 0,022.$$

Le calcul correspond à la correction manuscrite « 0,0220 » visible sur le sujet.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle parmi les tubes sans défaut. La probabilité conjointe d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$, tandis que $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. On divise la probabilité conjointe par la probabilité de l'événement conditionnant :

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{0,6825}{0,978} \approx 0,698.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est l'inverse du paramètre. Celui-ci est exprimé en heure inverse, donc l'espérance obtenue est en heures. Avec la valeur donnée dans le sujet :
$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,0001} = 10\,000.$
Cette moyenne représente la durée de bon fonctionnement moyenne d'un tube prélevé au hasard dans le stock.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : c'est la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

1. La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. En remplaçant t par 8 000 heures et λ par 0,0001, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} = 1 - e^{-0{,}8} \approx 0{,}5507$.
2. Comme la loi exponentielle est continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. L'arrondi au centième est donc 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$.

Question 3. Calculer, en arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est le complément de la probabilité de ne pas dépasser cette durée. Avec la fonction de répartition de la loi exponentielle, cela revient à calculer la probabilité de survie :
$P(T > 10\,000) = 1 - P(T \leq 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$.
L'arrondi au centième demandé est 0,37.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets contrôlés, 975 sont conformes ; ainsi :
$f = \dfrac{975}{1\,000} = 0{,}975$.
Cette fréquence est l'estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % centré sur f pour la proportion p. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3} près.

La formule du sujet utilise la fréquence observée $f = 0,975$ et l'effectif $n = 1\,000$. La marge d'erreur vaut $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}}$. Les bornes calculées avant arrondi sont environ 0,965323 et 0,984677. En arrondissant chacune à 10^{-3}, l'intervalle demandé est $[0,965\ ;\ 0,985]$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

SYNTHÈSE DE L'ÉPREUVE & RÉFÉRENTIEL • BTS FORGE

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 2, sauf en Traitement des matériaux où il est de 3. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents, en mobilisant équations différentielles, fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on peut associer une solution particulière aux solutions de l'équation homogène y' + ay = 0.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour T de loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni est [f - 1,96√(f(1 - f)/n) ; f + 1,96√(f(1 - f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer le taux de production d'un atelier de sa probabilité conditionnelle de défaut.
- Pour une probabilité de durée supérieure à t, utiliser le complément : P(T > t) = e^(-λt).
- Vérifier les données de l'arbre et les résultats de probabilité, notamment la cohérence de P(D) avec les taux indiqués.
- Dans l'intervalle de confiance, utiliser la fréquence observée f = 975/1 000 et arrondir les bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle avec un second membre constant ?

On résout d'abord l'équation homogène associée. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation complète, puis on additionne cette solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube fonctionne plus longtemps qu'une durée donnée ?

Pour une durée T de loi exponentielle de paramètre λ, on utilise P(T > t) = e^(-λt). Il faut exprimer t dans la même unité que celle utilisée pour λ, ici les heures.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices de 10 points chacun. Le coefficient est de 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, pour laquelle il est de 3.

Q : Comment construire l'intervalle de confiance demandé pour les rivets ?

Calculer d'abord f = 975/1 000, puis remplacer f et n = 1 000 dans la formule fournie. Calculer les deux bornes autour de f et les arrondir à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsforge.fr/assets/annales/bts-forge/E2 - Mathématiques/2022/BTS Forge - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Forge : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.