Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS FORGE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d’un chariot pendant le freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsforge.fr/assets/annales/bts-forge/E2 - Mathématiques/2022/BTS Forge - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant le freinage

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m/s est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction par ses limites, ses variations, le calcul d'une distance parcourue, un développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 en utilisant la formule fournie.

La formule fournie indique que les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. On remplace donc a par cette valeur dans la formule. Ces fonctions sont dérivables sur l'intervalle demandé $[0; +\infty[$, et la constante k décrit toutes les solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Pour la fonction constante $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. On substitue ces expressions dans le membre de gauche de l'équation différentielle :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

Le membre de gauche vaut donc bien 4, pour tout t. Il est égal au membre de droite de l'équation, ce qui vérifie que g est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1. c. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est une solution particulière, toute solution de l'équation complète s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée. Celle-ci est $ke^{-0,8t}$. Ainsi, en faisant varier la constante réelle k, on obtient l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$.

1. Solution homogène : $ke^{-0,8t}$.
2. Solution générale : $ke^{-0,8t} + 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = 20$. Or $e^0 = 1$, donc $k + 5 = 20$, d'où $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction correspondant à la vitesse du chariot. Elle vérifie bien la condition initiale puisqu'en $t = 0$, sa valeur est 20.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. L'exponentielle $e^{-0,8t}$ tend donc vers 0, et le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers 0. La limite de la somme est alors la limite de ce terme, augmentée de la constante 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente une équation de l'asymptote à la courbe représentative C.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale d'ordonnée 5. Il s'agit de la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le niveau $y = 5$.

On donne son équation sous la forme habituelle d'une droite horizontale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À l'aide de f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : f est strictement décroissante. Elle commence à $f(0) = 20$ et tend vers 5 lorsque t tend vers $+\infty$.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt nécessiterait que la vitesse atteigne 0 à un instant fini. Or, pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse diminue et se rapproche de $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre cette valeur ni s'annuler.

- Le chariot ralentit.
- Dans ce modèle, il ne s'arrête pas.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

Question 4. a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive les deux termes de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation de l'exponentielle composée, le premier terme a pour dérivée $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second a pour dérivée 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, donc F est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4. b. Sachant que la distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants, calculer la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive F, on calcule :

$$d = F(1) - F(0) = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

Cette valeur exacte est en mètres. Son approximation est $15,3250819\ldots\ \mathrm{m}$, soit, arrondie au centimètre, $15,33\ \mathrm{m}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro parmi les propositions. Recopier la réponse choisie sans justification. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel donne la partie régulière du développement limité : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste s'écrit sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc choisir la proposition qui conserve les trois termes affichés et ajoute ce reste d'ordre 2.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On lit dans l'expression de f que $f(0) = 15 + 5 = 20$, et la dérivée donnée dans la partie B donne $f'(0) = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et a pour coefficient directeur -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un système électrique entrée-sortie

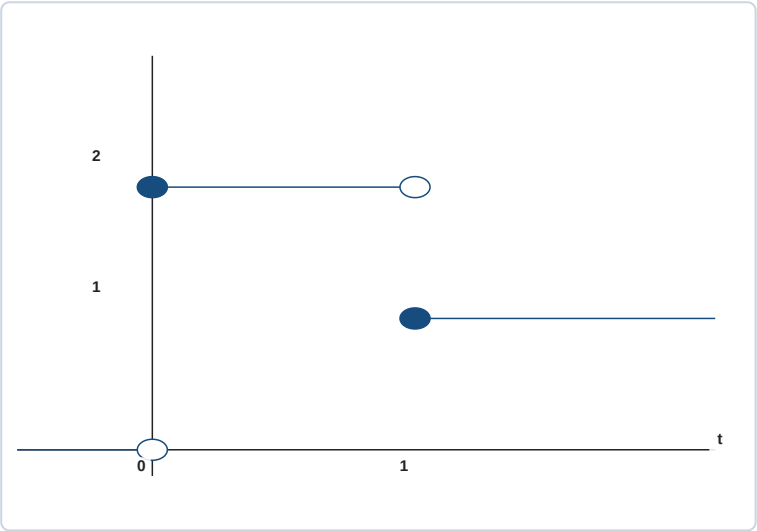
Un système électrique causal est décrit par sa fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1) et reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1). L’exercice demande de tracer le signal d’entrée puis de déterminer le signal de sortie à l’aide des transformées de Laplace, avant d’en étudier l’expression, la courbe et la limite.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est nul pour $t < 0$. Il vaut 2 de $t = 0$ à juste avant $t = 1$, puis 1 à partir de $t = 1$. Les points pleins et vides du dessin indiquent les valeurs prises aux instants de saut.

Courbe du signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, 2 si $0 \leq t < 1$, et 1 si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Par linéarité et d’après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On transforme chaque terme de $e(t)$, puis on les additionne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La relation du système est $S(p) = H(p)E(p)$. En remplaçant $H(p)$ et $E(p)$, puis en distribuant le numérateur, on obtient :

$$S(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p(p+1)}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Au dénominateur commun $p(p+1)$, le membre de droite a pour numérateur $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les fractions sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : la fonction inverse est décalée et multipliée par $U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Avec la décomposition précédente, $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls. L'inversion des autres termes donne l'expression de $s(t)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

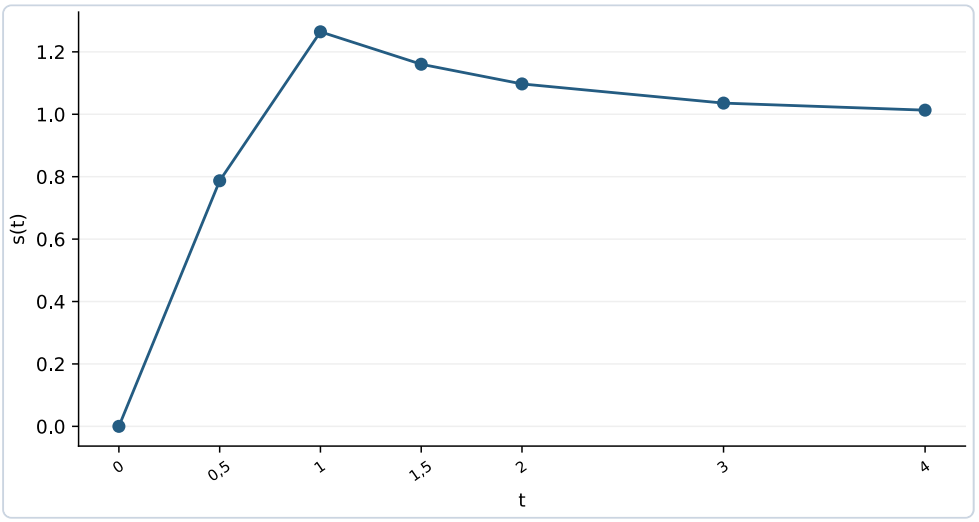
Question 5. a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1). Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

En remplaçant t par 1 dans l'expression donnée, $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, on arrondit au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5. b. Compléter, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction s.

La sortie est nulle avant 0. De 0 à 1, elle suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis elle suit $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. La courbe passe par $(1; 2 - 2/e)$, décroît ensuite et tend vers l'asymptote horizontale $s = 1$.



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0;0)$, passe par $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers $s = 1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers zéro ; il ne reste que le terme constant.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, mobilisant équations différentielles, étude de fonctions, intégration, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, alors sa limite en +∞ vaut 5 et son asymptote horizontale est y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t_0,t_1] f(t) dt.
- Un retard de durée a dans le temps correspond au facteur e^(-ap) dans le domaine de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale seulement après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle.
- Distinguer une vitesse qui tend vers zéro d'une vitesse qui tend vers une limite strictement positive pour conclure sur l'arrêt.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive à la borne supérieure puis soustraire sa valeur à la borne inférieure, avec l'unité.
- Lors d'une transformée inverse comportant e^(-p), appliquer le décalage temporel et respecter le caractère causal du signal.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre comme celle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée, puis trouvez une solution particulière de l'équation complète. La solution générale est leur somme ; utilisez ensuite la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment interpréter la limite de la vitesse pour savoir si le chariot s'arrête ?

Dans ce modèle, le chariot s'arrêterait si sa vitesse atteignait zéro à un instant. Ici, la vitesse tend vers 5 m/s : elle reste positive et le modèle ne prévoit donc pas d'arrêt.

Q : Comment organiser le temps sur cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points, et les trois parties du premier peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, prévoyez les tracés sur le document-réponse et gardez du temps pour vérifier calculs et unités.

Q : Quelles étapes présenter pour les questions de transformées de Laplace ?

Présentez le calcul de E(p), la relation S(p) = H(p)E(p), la décomposition algébrique et l'application des formules du formulaire. Tenez compte du retard temporel et indiquez les expressions demandées sur les intervalles précisés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsforge.fr/assets/annales/bts-forge/E2 - Mathématiques/2022/BTS Forge - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Forge : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.